UKURAN BERNILAI PROYEKSI DAN INTEGRAL SPEKTRAL

[1]Arta Ekayanti, [2]Ch. Rini Indrati
[1]Mahasiswa S2 Matematika FMIPA UGM
[2]Dosen Jurusan Matematika FMIPA UGM
arta_ekayanti@ymail.com
rinii@ugm.ac.id

Abstrak

Tujuan tulisan ini untuk mengkaji integral spektral. Pertama, diperlihatkan hubungan antara ukuran bernilai proyeksi dan ukuran kompleks, serta operator pada ruang Hilbert. Selanjutnya, diselidiki sifat-sifatnya.

Kata Kunci : ukuran bernilai proyeksi, ukuran kompleks, integral spektral.

PENDAHULUAN

Di dalam matematika analisis, khususnya analisis fungsional, salah satu bahasan yang diberikan adalah teori spektral. Pembahasan teori spektral yang banyak dibicarakan adalah teori spektral untuk operator terbatas *self-adjoint*. Menurut Stromberg (2006:1), terdapat tiga macam bentuk penyajian teori spektral untuk kasus tersebut, yaitu dalam bentuk kalkulus fungsional, perkalian operator dan ukuran bernilai proyeksi.

Pada pembahasan teori spektral dalam bentuk ukuran bernilai proyeksi, Stromberg menyebutkan bahwa terdapat korespondensi satu-satu antara operator terbatas *self-adjoint* dengan ukuran bernilai proyeksi. Dengan demikian, perlu dibahas terlebih dahulu mengenai hubungan korespondensi satu-satu antara operator terbatas dengan ukuran bernilai proyeksi. Hal tersebut tidak lain adalah konsep integral spektral.

Karena demikian pentingnya masalah integral spektral maka pada paper ini dibahas mengenai konsep integral spektral, yatu dengan menunjukkan hubungan ukuran bernilai proyeksi, ukuran kompleks serta operator pada ruang Hilbert.

PEMBAHASAN

Diketahui H ruang Hilbert Separabel. Didefinisikan $P(H) = \{T | T: H \to H \ proyeksi\}$. Pada tulisan ini, digunakan ruang Hilbert atas lapangan $\mathbb{C}$. Selanjutnya $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ menyatakan aljabar-σ Borel pada $\mathbb{C}$.

Definisi 1. *Pemetaan* $E: \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to P(H)$ *disebut* ***ukuran bernilai proyeksi*** *pada* $\mathbb{C}$ *jika memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:*

1. $E(\emptyset) = 0$.
2. $E(\mathbb{C}) = id_H$, *dengan* id_H *operator identitas* H.
3. *Jika* $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{C}), n \in \mathbb{N}$ *dengan* $B_n \cap B_m = \emptyset$ *untuk* $n \neq m$ *maka berlaku*
$$E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$$

(Bell, 2014:5).

Berikut ini diberikan sifat-sifat ukuran bernilai proyeksi.

Teorema 2. *Jika diberikan* E *ukuran bernilai proyeksi, maka untuk setiap* $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ *berlaku*

1. *Jika* $B_1 \subseteq B_2$ *maka* $E(B_1) \leq E(B_2)$.
2. $E(B_1) + E(B_2) = E(B_1 \cap B_2) + E(B_1 \cup B_2)$.
3. $E(B_1)E(B_2) = E(B_1 \cap B_2)$.

Bukti:

Diambil sebarang $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$.

1. Diketahui $B_1 \subseteq B_2$ maka diperoleh $B_2 = (B_2 \backslash B_1) \cup B_1$. Diperhatikan bahwa $B_2 \backslash B_1$ dengan B_1 saling asing, maka

$$E(B_2) = E((B_2 \backslash B_1) \cup B_1) = E(B_2 \backslash B_1) + E(B_1).$$

Karena E ukuran bernilai proyeksi maka E operator positif (Kreyszig, 1978:482). Dengan demikian, diperoleh $E(B_2 \backslash B_1) \geq 0$. Artinya $E(B_1) \leq E(B_2)$.

2. Diperhatikan bahwa B_1 dan B_2 dapat dinyatakan dalam bentuk
$$B_1 = (B_1 \cap B_2) \cup (B_1 \backslash B_2)$$
$$B_2 = (B_1 \cap B_2) \cup (B_2 \backslash B_1),$$
maka berlaku
$$B_1 \cup B_2 = (B_1 \cap B_2) \cup (B_1 \backslash B_2) \cup (B_2 \backslash B_1).$$
Dengan demikian, diperoleh
$$E(B_1) + E(B_2) = E(B_1 \cap B_2) + E(B_1 \cup B_2).$$
3. Berdasarkan poin 2, berlaku
$$E(B_1) + E(B_2) = E(B_1 \cap B_2) + E(B_1 \cup B_2).$$
Selanjutnya, dengan mengkomposisikan kedua ruas dengan $E(B_2)$ maka diperoleh
$$E(B_1)E(B_2) + E(B_2)E(B_2) = E(B_1 \cap B_2)E(B_2) + E(B_1 \cup B_2)E(B_2).$$
Diperhatikan bahwa $E(B_2)E(B_2) = E(B_2)$. Di samping itu, $E(B_1 \cap B_2) \leq E(B_2)$ maka $E(B_1 \cap B_2)E(B_2) = E$,begitu juga dengan $E(B_1 \cup B_2) \geq E(B_2)$, dengan demikian berlaku $E(B_1 \cup B_2)E(B_2) = E(B_2)$ (Kreyszig, 1978:486). Oleh karena itu,
$$E(B_1)E(B_2) + E(B_2) = E(B_1 \cap B_2) + E(B_2)$$
$$E(B_1)E(B_2) = E(B_1 \cap B_2).$$

■

Untuk lebih memahamimasalah ukuran bernilai proyeksi diperhatikan contoh berikut:

Contoh 2. Diketahui $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}), E)$ ruang ukuran berhingga dan $H = L^2(E)$. Jika untuk setiap $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$, didefinisikan $E(A) \in P(H)$ sebagai berikut:
$$E(A)(f) = \chi_A f,$$
dengan χ_A menyatakan fungsi karakteristik A, maka pemetaan $\phi: \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to P(H)$ dengan $\phi(A) = E(A)$ merupakan ukuran bernilai proyeksi pada H.

Berikut ini diberikan definisi ukuran kompleks:

Definisi 2. *Pemetaan* $E: \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to P(H)$ *disebut* ***ukuran kompleks*** *pada* $\mathbb{C}$ *jika memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:*

1. $E(\emptyset) = 0$.

2. Jika $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{C}), n \in \mathbb{N}$ *dengan* $B_n \cap B_m = \emptyset$ *untuk* $n \neq m$ *maka berlaku*
$$E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$$

(Bagget, 1991:24).

Diberikan E ukuran bernilai proyeksi. Untuk setiap $x, y \in H$ dibentuk pemetaan $E_{x,y}: \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, dengan definisi
$$E_{x,y}(B) = \langle E(B)x, y \rangle, \qquad (1)$$
untuk setiap $B \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$. Diperhatikan bahwa pemetaan $E_{x,y}$ bernilai $\mathbb{C}$. Pada teorema berikut, akan ditunjukkan bahwa $E_{x,y}$ ukuran kompleks serta kaitannya dengan ukuran bernilai proyeksi.

Teorema 3. *Diberikan operator* $E : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to P(H)$ *dengan* $E(\mathbb{C}) = id_H$ *dan untuk setiap* $x, y \in H$, *dibentuk pemetaan* $E_{x,y}: \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ *dengan definisi di* (1). *Operator* E *ukuran bernilai proyeksi jika dan hanya jika* $E_{x,y}$ *ukuran kompleks.*

Bukti:

($\Rightarrow$) Diambil sebarang $x, y \in H$ dan $B_n \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{C})$ dengan $B_n \cap B_m = \emptyset$ untuk $m \neq n$, maka berlaku

$$\begin{aligned} E_{x,y}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) &= \left\langle E\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) x, y\right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} E(B_k)\, x, y\right\rangle \\ &= \left\langle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} E(B_k)\, x, y\right\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle E(B_k)x, y\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle E(B_k)x, y\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} E_{x,y}(B_k) \end{aligned}$$

Jadi, $E_{x,y}$ merupakan ukuran kompleks.

($\Leftarrow$) Katakan $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ dengan $n \in \mathbb{N}$ sehingga $B_n \cap B_m = \emptyset$ untuk $n \neq m$. Diambil sebarang $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ dengan $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, maka untuk setiap $x, y \in H$ berlaku

$$\begin{aligned} \langle E(B_1 \cup B_2)x, y\rangle &= E_{x,y}(B_1 \cup B_2) \\ &= E_{x,y}(B_1) + E_{x,y}(B_2) \\ &= \langle E(B_1)x, y\rangle + \langle E(B_2)x, y\rangle \\ &= \langle (E(B_1) + E(B_2))x, y\rangle \end{aligned}$$

Karena berlaku untuk sebarang $x, y \in H$ maka diperoleh $E(B_1 \cup B_2) = E(B_1) + E(B_2)$. Dengan demikian diperoleh $E(\emptyset) = 0$. Selanjutnya, untuk membuktikan bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} E(B_n)x$konvergen dengan membuktikan bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} \|E(B_n)x\| < \infty$ (Royden, 1991:295). Diperhatikan bahwa $E_{x,y}$ ukuran kompleks, maka berlaku

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \|E(B_n)x\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle E(B_n)x, E(B_n)x\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle E(B_n)E(B_n)x, x\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle E(B_n)x, x\rangle \\ &= E_{x,x}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \\ &= \left\| E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) x \right\|^2 \\ &\leq \|x\|^2. \end{aligned}$$

Jadi, $\sum_{n=1}^{\infty} \|E(B_n)x\|^2 < \infty$, hal ini berarti $\sum_{n=1}^{\infty} E(B_n)x$ konvergen di H. Dengan demikian, barisan $\sum_{n=1}^{N} E(B_n)x$ konvergen di H , artinya $\sum_{n=1}^{N} E(B_n)$ konvergen pada topologi operator kuat. Katakan $\sum_{n=1}^{N} E(B_n)$ konvergen ke P. Diambil sebarang $x, y \in H$ maka berlaku

$$\begin{aligned} \left\langle E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) x, y\right\rangle &= E_{x,y}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} E_{x,y}(B_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle E(B_n)x, y\rangle \\ &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} E(B_n)\, x, y\right\rangle \\ &= \langle Px, y\rangle \end{aligned}$$

Karena berlaku untuk sebarang $x, y \in H$ maka diperoleh $E(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = P$. ■

Diketahui $M(\mathbb{C})$ adalah himpunan fungsi $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ terukur dan terbatas. Didefinisikan norma dari f sebagai berikut:

$$\|f\| = \sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{C}\}.$$

Diperhatikan bahwa, untuk setiap E ukuran bernilai proyeksi, menentukan dengan tunggal ukuran kompleks $E_{x,y}$ dengan $x, y \in H$. Terkait hal tersebut, integral terhadap ukuran kompleks $E_{x,y}$ memiliki makna sebagai berikut

$$\int f dE_{x,y} = \langle (\int f dE) x, y \rangle$$

Selanjutnya, berikut ini diberikan teorema yang menyatakan hubungan antara operator pada ruang Hilbert dengan integral.

Teorema 4. *Jika $E: \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to P(H)$ ukuran bernilai proyeksi dan $f \in M(\mathbb{C})$ maka terdapat dengan tunggal $A \in B(H)$ sehingga untuk setiap $x, y \in H$ berlaku*

$$\langle Ax, y \rangle = \int f dE_{x,y} = \int f(\lambda) dE_{x,y}(\lambda).$$

Bukti:
Didefinisikan pemetaan $\phi: H \times H \to \mathbb{C}$ dengan

$$\phi(x, y) = \int f(\lambda) d\langle E(\lambda)x, y \rangle,$$

untuk setiap $x, y \in H$. Diperhatikan bahwa ϕ seskuilinear. Diperhatikan bahwa f merupakan fungsi terbatas, maka ϕ merupakan seskuilinear terbatas. Dengan demikian, menurut Berberian (1961:130), terdapat dengan tunggal operator $A \in B(H)$ sehingga

$$\langle Ax, y \rangle = \phi(x, y) = \int f(\lambda) dE_{x,y}(\lambda).$$

■

Bentuk integral pada Teorema 4, selanjutnya dikenal dengan integral spektral.

Dengan demikian, berdasarkan teorema di atas dapat diketahui bahwa suatu operator $A \in B(H)$ dapat direpresentasi dalam bentuk integral, yang disebut dengan integral spektral. Selanjutnya, pada teorema berikut ini ditunjukkan sifat-sifat dari integral spektral.

Teorema 5. *Jika E ukuran bernilai proyeksi, $f, g \in M(\mathbb{C})$ dan α skalar maka berlaku*

1. $\int \alpha f dE = \alpha \int f dE$
2. $\int (f + g) dE = \int f dE + \int g dE$
3. $\int f^* dE = (\int f dE)^*$
4. $\int f g dE = \int f dE \int g dE.$

Bukti:
Diambil sebarang $f, g \in M(\mathbb{C})$. Untuk bagian 1 dan 2 trivial berdasarkan sifat integral. Berikut iniakan dibuktikan untuk bagian 3 dan 4. Didefinisikan $A = \int f dE$ dan $B = \int f^* dE$. Dengan demikian untuk setiap $x, y \in H$ berlaku

$$\begin{aligned} \langle x, B(y) \rangle &= (\langle B(y), x \rangle)^* \\ &= \left(\int f^*(\lambda) d\langle E(\lambda)x, y \rangle\right)^* \\ &= \int f(\lambda) d\langle x, E(\lambda)y \rangle \\ &= \int f(\lambda) d\langle E(\lambda)x, y \rangle \\ &= \langle A(x), y \rangle. \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh $B = A^*$ yaitu $\int f^* dE = (\int f dE)^*$. Jadi, bagian3 terbukti. Selanjutnya untuk membuktikan bagian, didefinikan $A = \int f dE$ dan $B = \int g dE$. Diketahui E merupakan ukuran bernilai proyeksi, didefinisikan

$$E(M) = \langle E(M)(B)x, y \rangle,$$

dengan $M \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ dan $x, y \in H$. Dengan demikian berlaku

$$\begin{aligned} E(M) &= \langle E(M)(B)x, y \rangle \\ &= \langle B(x), E(M)y \rangle \\ &= \int g(\lambda) d\langle E(\lambda)x, E(M)y \rangle \\ &= \int g(\lambda) d\langle E(M)E(\lambda)x, y \rangle \\ &= \int g(\lambda) d\langle E(M \cap \lambda)x, y \rangle \\ &= \int_M g(\lambda) d\langle E(\lambda)x, y \rangle. \end{aligned}$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned} \langle AB(x), y \rangle &= (\langle y, AB(x) \rangle)^* \\ &= (\langle A^*(y), B(x) \rangle)^* \\ &= (\int f^* d\langle E(\lambda)(y), B(x) \rangle)^* \\ &= \int f(\lambda) d\langle E(\lambda)B(x), y \rangle \\ &= \int f(\lambda) dE(\lambda) \\ &= \int f(\lambda) d\left(\int g(\lambda) d\langle E(\lambda)x, y \rangle\right) \\ &= \int f(\lambda) g(\lambda) d\langle E(\lambda)(x), y \rangle. \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh $AB = \int f g dE$. Dengan demikian bagian 4 terbukti, yaitu

$$\int f g dE = \int f dE \int g dE.$$

■

Diperhatikan bahwa, jika E ukuran bernilai proyeksi maka $\int dE(\lambda) = E(\mathbb{C}) =$

id_H . Lebih lanjut, $\int \chi_M(\lambda) dE(\lambda) = \int_M dE(\lambda) = E(M)$, untuk setiap $M \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$.

Selanjutnya, berikut ini diberikan sifat aljabar selanjutnya dari integral spektral.

Teorema 6. *Jika E ukuran bernilai proyeksi dan $E(A)$ komutatif dengan $T \in B(H)$ untuk setiap $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$, maka $\int f dE$ komutatif dengan T.*

Bukti:

Diambil sebarang $x, y \in H$. Dimisalkan $S = \int f dE$. Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned} \langle STx, y \rangle &= \int f(\lambda) d\langle E(\lambda)Tx, y \rangle \\ &= \int f(\lambda) d\langle TE(\lambda)x, y \rangle \\ &= \int f(\lambda) d\langle E(\lambda)x, T^* y \rangle \\ &= \langle Sx, T^* y \rangle \\ &= \langle TSx, y \rangle. \end{aligned}$$

Karena berlaku untuk sebarang $x, y \in H$, maka $ST = TS$. Artinya $\int f dE$ komutatif dengan operator

$T \in B(H)$. ■

PENUTUP

Simpulan

Untuk E ukuran bernilai proyeksi, diperoleh $E_{x,y}(B) = \langle E(B)x, y \rangle$ ukuran kompleks, begitu juga sebaliknya, dengan $B \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ sebarang. Selanjutnya, terdapat korespondensi satu-satu antara ukuran bernilai proyeksi dengan operator terbatas pada ruang Hilbert. Jika diberikan operator $A \in B(H)$ maka A dapat direpresentikan sebagai berikut:

$$\langle Ax, y \rangle = \int f dE_{x,y} = \int f(\lambda) dE_{x,y}(\lambda) \quad (2)$$

Persamaan (2) selanjutnya dikenal dengan integral spektral. Persamaan (2) bersifat linear, multiplikatif, serta $\int f^* dE = \left(\int f dE\right)^*$. Lebih lanjut, jika suatu operator T komutatif dengan suatu ukuran bernilai proyeksi maka operator T komutatif dengan integral yang dibangun oleh ukuran bernilai proyeksi tersebut.

Saran

Setelah membahas mengenai integral spektral, terdapat beberapa hal yang masih dapat dikerjakan pada penelitian lebih lanjut. Diantaranya membahas penerapan integral spektral, yaitu pada teorema spektral untuk operator *self-adjoint* beserta buktinya. Untuk setiap T operator self-adjoint, maka T operator normal. Berdasarkan hal tersebut, maka dapat dibahas lebih lanjut mengenai teorema spektral untuk operator normal.

DAFTAR PUSTAKA

Bagget, L.W., 1991, *Functional Analysis*, Marcell, New York.

Bell, J., *Projection-Valued Measure and Spectral Integrals*, http://individual.utoronto.ca/jordanbell/notes/pvm.pdf, diakses tanggal 8 November 2014.

Berberian,S. K, 1961, *Introduction to Hilbert Spaces*, Oxford University Press, New York.

Kreyszig, E., 1978, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons, New York.

Rudin, W., 1991, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York.

Stromberg, R., 2006, Spectral Theory for Bounded Self-Adjoint, *U.U.D.M Project Report 2006:5*, Uppsala University.